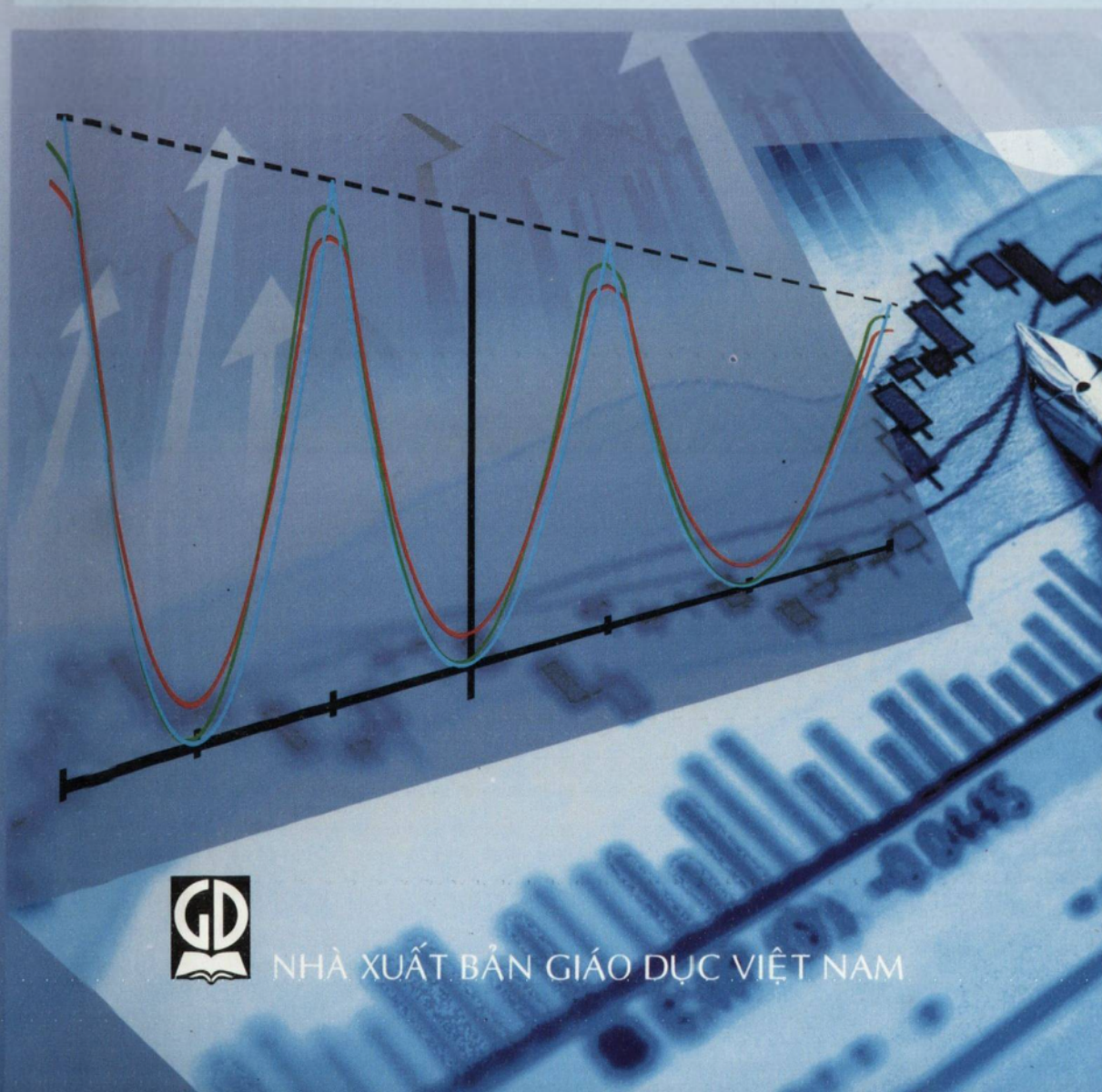


PGS.TS. TÔ VĂN BAN

# GIÁO TRÌNH GIẢI TÍCH I



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



PGS.TS. TÔ VĂN BAN

# GIÁO TRÌNH GIẢI TÍCH I

(Dành cho sinh viên các trường Kỹ thuật và Công nghệ)

*(Tái bản lần thứ nhất có chỉnh lý bổ sung)*

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

## **HỘI ĐỒNG XÉT DUYỆT GIÁO TRÌNH**

|                          |                             |
|--------------------------|-----------------------------|
| GS.TSKH. NGUYỄN XUÂN TÂN | – Chủ tịch                  |
| PGS.TS. NGUYỄN XUÂN VIÊN | – Ủy viên phản biện         |
| PGS.TS. LÊ BÁ LONG       | – Ủy viên phản biện         |
| TS. NGUYỄN ĐỨC NỤ        | – Ủy viên phản biện         |
| TS. CUNG THỂ ANH         | – Thư ký, uỷ viên phản biện |

# MỤC LỤC

|                                                             | <i>Trang</i> |
|-------------------------------------------------------------|--------------|
| LỜI NÓI ĐẦU .....                                           | 7            |
| KÝ HIỆU HAY SỬ DỤNG .....                                   | 9            |
| <b>Chương 1. GIỚI HẠN, LIÊN TỤC</b> .....                   | <b>11</b>    |
| §1.1. SỐ THỰC .....                                         | 11           |
| 1.1.1. Mở đầu .....                                         | 11           |
| 1.1.2. Các tính chất cơ bản của tập các số thực .....       | 15           |
| 1.1.3. Tập số thực mở rộng .....                            | 21           |
| 1.1.4. Lực lượng của $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{R}$ .....      | 22           |
| §1.2. GIỚI HẠN DÃY SỐ .....                                 | 23           |
| 1.2.1. Sự hội tụ – Phân kỳ .....                            | 23           |
| 1.2.2. Dãy đơn điệu .....                                   | 30           |
| 1.2.3. Dãy con .....                                        | 33           |
| 1.2.4. Dãy truy hồi.....                                    | 38           |
| §1.3. HÀM SỐ MỘT BIÊN SỐ .....                              | 39           |
| 1.3.1. Sơ lược về hàm số .....                              | 39           |
| 1.3.2. Hàm số chẵn, lẻ .....                                | 45           |
| 1.3.3. Hàm số ngược .....                                   | 46           |
| 1.3.4. Các hàm sơ cấp cơ bản .....                          | 49           |
| 1.3.5. Một số hàm số thông dụng khác.....                   | 50           |
| §1.4. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ .....                             | 54           |
| 1.4.1. Định nghĩa.....                                      | 54           |
| 1.4.2. Một số tính chất ban đầu của giới hạn hàm số .....   | 55           |
| 1.4.3. Các phép toán về giới hạn hàm số.....                | 59           |
| 1.4.4. Vô cùng bé, vô cùng lớn .....                        | 61           |
| 1.4.5. Biến thể của các giới hạn quan trọng .....           | 66           |
| §1.5. HÀM SỐ LIÊN TỤC.....                                  | 68           |
| 1.5.1. Định nghĩa.....                                      | 68           |
| 1.5.2. Các phép toán với các hàm số liên tục .....          | 71           |
| 1.5.3. Các tính chất của hàm số liên tục trên đoạn kín..... | 72           |
| 1.5.4. Một số ví dụ cuối chương.....                        | 76           |
| TÓM TẮT CHƯƠNG 1 .....                                      | 798          |
| EXERCISES – BÀI TẬP.....                                    | 799          |
| ANSWERS – ĐÁP SỐ .....                                      | 85           |

|                                                            |            |
|------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Chương 2. ĐẠO HÀM – VI PHÂN</b>                         | <b>87</b>  |
| §2.1. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP MỘT                           | 87         |
| 2.1.1. Định nghĩa                                          | 87         |
| 2.1.2. Các phép toán với đạo hàm                           | 89         |
| 2.1.3. Đạo hàm của hàm hợp                                 | 90         |
| 2.1.4. Đạo hàm của hàm ngược                               | 90         |
| 2.1.5. Đạo hàm một phía – Đạo hàm vô cùng                  | 93         |
| 2.1.6. Vi phân                                             | 95         |
| 2.1.7. Đạo hàm của hàm ẩn                                  | 97         |
| 2.1.8. Tính gần đúng đạo hàm                               | 100        |
| §2.2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO                           | 101        |
| 2.2.1. Định nghĩa                                          | 101        |
| 2.2.2. Quy tắc Leibniz (tính đạo hàm cấp cao của một tích) | 103        |
| 2.2.3. Vi phân cấp cao                                     | 103        |
| §2.3. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ ĐẠO HÀM                        | 104        |
| 2.3.1. Định lý Rolle                                       | 104        |
| 2.3.2. Định lý Lagrange                                    | 106        |
| 2.3.3. Quy tắc L'Hospital                                  | 110        |
| §2.4. CÔNG THỨC TAYLOR                                     | 114        |
| 2.4.1. Thiết lập công thức                                 | 114        |
| 2.4.2. Khai triển Maclaurin của một số hàm sơ cấp          | 116        |
| 2.4.3. Ứng dụng để tính gần đúng                           | 119        |
| 2.4.4. Ứng dụng để tìm giới hạn                            | 123        |
| §2.5. CÁC ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM                             | 127        |
| 2.5.1. Khảo sát hàm số $y = f(x)$                          | 127        |
| 2.5.2. Khảo sát đường cong cho dưới dạng tham số           | 137        |
| 2.5.3. Khảo sát đường cong cho dưới dạng tọa độ cực        | 142        |
| 2.5.4. Các vận tốc liên quan nhau (Related Rates)          | 151        |
| 2.5.5. Một số ứng dụng thực tế khác                        | 153        |
| TÓM TẮT CHƯƠNG 2                                           | 159        |
| EXERCISES – BÀI TẬP                                        | 161        |
| ANSWERS – ĐÁP SỐ                                           | 171        |
| <b>Chương 3. TÍCH PHÂN</b>                                 | <b>177</b> |
| §3.1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH                                   | 177        |
| 3.1.1. Định nghĩa, tính chất                               | 177        |

|                                                                               |            |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.1.2. Phương pháp tính tích phân bất định.....                               | 180        |
| 3.1.3. Tích phân bất định của một số lớp hàm sơ cấp .....                     | 187        |
| §3.2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH.....                                                 | 196        |
| 3.2.1. Định nghĩa và các tính chất mở đầu .....                               | 196        |
| 3.2.2. Các lớp hàm khả tích.....                                              | 198        |
| 3.2.3. Các tính chất của tích phân xác định.....                              | 202        |
| 3.2.4. Cách tính tích phân xác định .....                                     | 206        |
| 3.2.5. Tính gần đúng tích phân xác định .....                                 | 215        |
| §3.3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH .....                                   | 220        |
| 3.3.1. Tính diện tích hình phẳng.....                                         | 220        |
| 3.3.2. Tính độ dài đường cong .....                                           | 233        |
| 3.3.3. Tính thể tích vật thể.....                                             | 224        |
| 3.3.4. Tính diện tích mặt tròn xoay .....                                     | 225        |
| 3.3.5. Các áp dụng khác của tích phân .....                                   | 226        |
| §3.4. TÍCH PHÂN SUY RỘNG.....                                                 | 229        |
| 3.4.1. Tích phân với cận vô hạn<br>(Tích phân suy rộng loại một).....         | 229        |
| 3.4.2. Tích phân của hàm không bị chặn<br>(Tích phân suy rộng loại hai) ..... | 236        |
| §3.5. MỘT SỐ VÍ DỤ TỔNG HỢP .....                                             | 240        |
| 3.5.1. Các ví dụ kỹ năng và nâng cao.....                                     | 240        |
| 3.5.2. Các ví dụ áp dụng thực tế.....                                         | 245        |
| TÓM TẮT CHƯƠNG 3.....                                                         | 251        |
| EXERCISES – BÀI TẬP.....                                                      | 254        |
| ANSWERS – ĐÁP SỐ .....                                                        | 264        |
| <b>Chương 4. CHUỖI .....</b>                                                  | <b>269</b> |
| §4.1. CHUỖI SỐ .....                                                          | 269        |
| 4.1.1. Định nghĩa.....                                                        | 269        |
| 4.1.2. Điều kiện cần để chuỗi hội tụ.....                                     | 272        |
| 4.1.3. Tiêu chuẩn Cauchy.....                                                 | 272        |
| 4.1.4. Các tính chất về phép toán .....                                       | 273        |
| §4.2. CHUỖI SỐ DƯƠNG.....                                                     | 273        |
| 4.2.1. Các tính chất mở đầu.....                                              | 273        |
| 4.2.2. Các quy tắc khảo sát sự hội tụ.....                                    | 276        |

|                                                        |     |
|--------------------------------------------------------|-----|
| §4.3. CHUỖI CÓ SỐ HẠNG VỚI DẤU BẤT KỲ .....            | 281 |
| 4.3.1. Chuỗi đan dấu .....                             | 281 |
| 4.3.2. Hội tụ tuyệt đối.....                           | 282 |
| §4.4. CHUỖI HÀM SỐ .....                               | 285 |
| 4.4.1. Sự hội tụ, miền hội tụ .....                    | 285 |
| 4.4.2. Hội tụ đều .....                                | 286 |
| 4.4.3. Tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều .....        | 288 |
| §4.5. CHUỖI LUYỆN THỪA .....                           | 289 |
| 4.5.1. Khái niệm chuỗi lũy thừa, bán kính hội tụ ..... | 289 |
| 4.5.2. Quy tắc tìm bán kính hội tụ .....               | 290 |
| 4.5.3. Tính chất của chuỗi lũy thừa .....              | 293 |
| 4.5.4. Khai triển một hàm thành chuỗi lũy thừa.....    | 294 |
| 4.5.5. Ứng dụng.....                                   | 298 |
| 4.5.6. Tính tổng một số chuỗi.....                     | 299 |
| 4.5.7. Một số ví dụ khác .....                         | 305 |
| 4.5.8. Sự tồn tại hàm liên tục không khả vi.....       | 306 |
| §4.6. CHUỖI FOURIER .....                              | 308 |
| 4.6.1. Chuỗi lượng giác .....                          | 308 |
| 4.6.2. Chuỗi Fourier .....                             | 308 |
| TÓM TẮT CHƯƠNG 4.....                                  | 317 |
| EXERCISES – BÀI TẬP.....                               | 320 |
| ANSWERS – ĐÁP SỐ .....                                 | 329 |
| TÀI LIỆU THAM KHẢO.....                                | 333 |

## Lời nói đầu

**Giải tích toán học** hay ngắn gọn **Giải tích**, **Giải tích toán** là bộ môn của Toán học liên quan đến những vấn đề của biến đổi và chuyển động. Đối tượng chủ yếu của nó là nghiên cứu các đại lượng vô cùng bé. Nó đề cập đến những đại lượng nọ tiến đến những đại lượng kia; ý tưởng cơ bản là tính toán đại lượng này thông qua giới hạn của các đại lượng khác dễ tính toán hơn. Hai nhánh chính của giải tích là phép tính vi phân và phép tính tích phân được liên hệ với nhau bởi định lý cơ bản của giải tích.

Dưới dạng toán giải tích, I. Newton đã giải thích chuyển động của các hành tinh xung quanh Mặt Trời. Ngày nay, giải tích dùng để tính toán quỹ đạo của các vệ tinh, dự báo kích cỡ quần thể, ước lượng giá hàng hóa, dự báo thời tiết, đo thông số tim mạch, tính toán phí bảo hiểm và rất nhiều lĩnh vực khác. Chính vì thế, giải tích chiếm phần chủ đạo trong Giáo dục toán ở bậc đại học.

Bộ sách **Giáo trình Giải tích** này nhằm giới thiệu cho người đọc những nội dung căn bản nhất của giải tích một cách tương đối chặt chẽ, logic và cô đọng. Nó được chia làm hai quyển: quyển I (**Giáo trình Giải tích I**) và quyển II (**Giáo trình Giải tích II**). Quyển I được chia làm bốn chương. Nội dung thiết yếu của Chương 1 là giới hạn và liên tục của hàm số với những kiến thức bổ trợ là số thực và giới hạn dãy số. Các kết quả về đạo hàm, vi phân cấp một, cấp cao, công thức Taylor, các ứng dụng của đạo hàm (đặc biệt nhấn mạnh khảo sát đường cong dưới dạng tham số, dạng toạ độ cực), được trình bày ở Chương 2. Chương 3 dành cho phép tính tích phân bao gồm tích phân bất định, tích phân xác định cũng như các ứng dụng hết sức đa dạng của chúng. Ở Chương 4, độc giả được biết đến các kết quả của lý thuyết chuỗi số, chuỗi hàm, chuỗi lũy thừa, và đặc biệt là chuỗi Fourier có rất nhiều ứng dụng cho ngành Điện, Địa chất Công trình, Cơ khí, ...

Theo xu hướng tinh giản, một số nội dung, nhiều chi tiết đôi khi rất thú vị về mặt ý nghĩa toán; một số chứng minh định lý, ... được lược giản, nhưng dung lượng kiến thức, tầm sâu tri tuệ tư duy logic vẫn hoàn toàn đảm bảo, đủ để sinh viên kỹ thuật và công nghệ lĩnh hội được dung lượng các môn học khác ở bậc đại học. Thay vào đó, sách đặc biệt chú trọng đến

khía cạnh áp dụng của vấn đề. Những ví dụ, bài tập có tính ứng dụng cao trả lời cho người đọc câu hỏi sách này, môn học này để làm gì, tác dụng ra sao với các môn học tiếp, với năng lực người kỹ sư tương lai. Sách được soạn thảo kỹ để sinh viên chỉ với hướng dẫn nhất định của giáo viên có thể tự đọc, tự nghiên cứu, phù hợp với phương thức đào tạo theo học chế tín chỉ hiện nay. Với trợ giúp của các phần mềm tính toán hiện đại, các hình vẽ được thể hiện phong phú, rõ ràng, minh họa sinh động cho các ý tưởng khoa học, chắc chắn sẽ làm hài lòng cả những người đọc cẩn trọng.

Tuy nhiều định lý không dẫn ra chứng minh, nhưng những chứng minh ở các định lý còn lại là ngắn gọn, dễ tiếp cận; nhiều vấn đề toán học khác được trình bày rõ ràng, đủ độ chính xác, độc đáo và rất dễ nắm bắt. Theo ý nghĩa đó, sách cũng là tài liệu tham khảo có giá trị cho sinh viên ngành Toán.

Ở cuối mỗi chương là hàng loạt ví dụ minh họa cho lý thuyết chủ đạo cũng như những ví dụ áp dụng thực tiễn. Phần bài tập cuối chương được viết bằng tiếng Anh dạng song ngữ có tính giản công thức đối với tiếng Việt, với hy vọng mang đến cho sinh viên hứng khởi và giúp sinh viên làm quen với các thuật ngữ Toán tiếng Anh. Những mục, phần, ... nâng cao, có tính chất tham khảo có thể bỏ qua trong lần đọc đầu tiên được in nhỏ hơn và bắt đầu bởi (✱), kết thúc bởi (✱). Bên cạnh một thuật ngữ hay ký hiệu chủ đạo, chúng tôi cũng giới thiệu những thuật ngữ, ký hiệu tương tự thường được sử dụng ở các tài liệu khác để người đọc dễ tiếp nhận khi tiếp xúc với những tài liệu đó.

Tác giả tỏ lòng cảm ơn chân thành đến Hội đồng xét duyệt giáo trình đã đọc kỹ bản thảo, cho những đóng góp quý báu về cấu trúc, trình bày, nội dung chi tiết, ... để cuốn sách được hoàn thiện. Trong quá trình soạn thảo, các đồng nghiệp ở Bộ môn Toán đã cổ vũ, đọc kỹ bản thảo và cho những góp ý thiết thực; Ban lãnh đạo Khoa Công nghệ thông tin; Ban lãnh đạo Học viện Kỹ thuật Quân sự đã tạo mọi điều kiện để giáo trình sớm ra mắt bạn đọc; các biên tập viên NXB Giáo dục Việt Nam đã làm cho cuốn sách có một chất lượng mới. Những sự cổ vũ, ủng hộ ấy, khó có thể nói hết bằng một lời vô cùng cảm ơn của tác giả.

Hà Nội, tháng 03 – 2012  
TÁC GIẢ

